总结

2019.10 fyh

图论

1 2-SAT

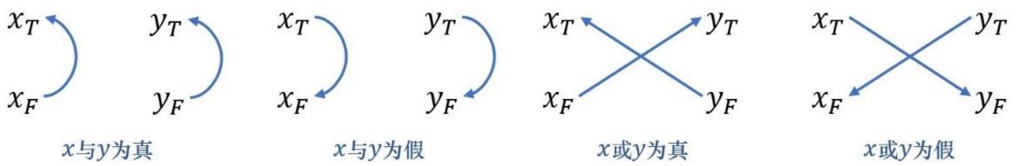
求布尔方程组的解。

1.1 拆点

将每个变量拆为“真”与“假”两个点。

1.2 建边

四种建边方式:



1.3 解决

1.3.1 解的存在性判断

若存在解，那么同一变量的两个分点一定不在一个 SCC 内;否则无解。

1.3.2 解的求值

将每个 SCC 缩点，得到一张 DAG。求出它的拓扑序，从拓扑序最低点开始按 0,1,0,1 循环赋值。

2 棋盘问题的二分图解决

2.1 模型一

2.1.1 问题

给定一个 n*m 的棋盘（网格图），每行每列仅能放置一个棋子，求最多能放置多少棋子。

2.1.2 解决

将棋盘的每一行看作一个点，每一列分别看作一个点，那么我们得到了分别由行点和列点组成的两个点集。把它们分别看做二分图的左右图，那么一条连接左右两图的边在匹配中便占据了一个行点（网格图中的一行）和一个列点（网格图中的一列）。这张图的匹配数量即为能放置的棋子的数量，所以求出最大匹配即可。问题得到解决。

值得一提的是，这个答案总会是 min(n,m)，但是这种问题的转化方式是极其巧妙的。

2.2 模型二

2.2.1 问题

给定一个 n*m 的棋盘，棋盘上有的格子有棋子，有的格子则没有。询问这张棋盘能否通过交换行与交换列操作使得棋盘主对角线上都有棋子。

2.2.2 解决

实际上只需要令棋盘的每行都能对应一个在该行上有棋子的列，就一定可以通过行列交换使得对角线上都有棋子，于是问题得到转化。依然按照上面的方式建立两个点集（左、右图），然后对于棋盘的每个棋子，将它所在的行与所在的列连边，那么该二分图的一个匹配就是上面所说的一些“对应关系”的并。于是问题得到解决。

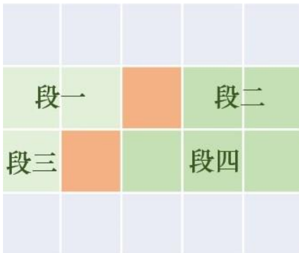
2.3 模型三

2.3.1 问题

给定一个 n*m 的棋盘，棋盘上有的格子有障碍，有的格子则没有。询问能放多少个棋子，使得它们不能互相看见。

2.3.2 解决

实际上一个障碍会把一行和一列分别分成两段，若干障碍就会产生出若干行/列的小段，像这样（两个障碍把第二、三行分别分成了两小段；列小段也同理，未画出）：



然后我们现在要使得每一段行/列的小段里面，有且仅有一个棋子。那么我们依照上面的思路延伸，把行的每一小段看作点，列的每一小段看作点，然后我们得到二分图的左图和右图；对于没有障碍的格子，我们把它的行和列连边。然后每条边实际上对应了一个特定格子，这条边是否在二分图的匹配集内就代表了这个格子放不放棋子。所以答案为这张图的的最大匹配数，问题得到解决。

数论

3 矩阵变换

3.1 矩阵乘法与向量变换

一个 n*m 的矩阵可以被看作 m 个 n 维向量的并。一个 n*1 阶矩阵的乘法可以理解成对一个 n 维向量进行变换。

3.2 常用变换形式

对 1*n 阶矩阵$[x_0, x_1, \ldots, x_n]$进行变换，方式如下：

3.2.1 将元素x_i清零

设转置矩阵（主对角线为 1，其余为 0）：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

将元素(i,i)置为 0，然后令两矩阵相乘即可。

3.2.2 将元素x_i与x_j互换

设转置矩阵（主对角线为 1，其余为 0）：

$$T=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

将元素(i,i),(j,j)置为 0，将元素(i,j),(j,i)置为 1，然后令两矩阵相乘即可。

3.2.3 将元素x_i+1

将原矩阵变为$[1, x_0, x_1, \ldots, x_n]$，第 0 位置上的“1”是为了给元素做加减法。

设转置矩阵（主对角线为 1，其余为 0）：

$$T=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

将元素(i,0)置为 1，然后令两矩阵相乘即可。

经验/方向

考场前 15min 疏通题意，然后前 2h 内写完所有三道题目的部分分，剩下 1h 对有思路的题目进行攻坚，最后余留 15min 检查程序。

考试前准备以做套题为主，注意控制时间和题目难度。